7/12/2016

Παράγωγοι

I διάστημα

a εσωτερικό σημείο του I

$f: I \to \mathbb{R}$.

Η f λέγεται παραγωγίσιμη στο a αν υπάρχει το όριο $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ και είναι πραγματικός αριθμός.

Συμβ. $f'(a)$ ή $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=a}$ και ονομάζεται παράγωγος της f στο a

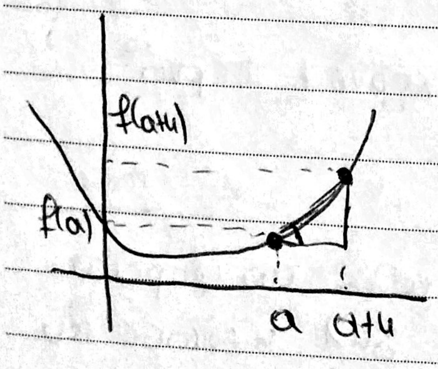
Σημείωση Υπάρχει η περίπτωση να υπάρχει το όριο $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ και να ισούται με $+\infty$ ή $-\infty$

Σε αυτή τη περίπτωση γράφουμε $f'(a) = +\infty$ ή $f'(a) = -\infty$ αλλά λέμε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο a.

Κάνοντας αλλαγή μεταβλητής

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Γεωμετρική ερμηνεία



Ο λόγος $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ εκφράζει την κλίση της ευθείας που περνά από τα σημεία $(a, f(a))$, $(a+h, f(a+h))$.

Το όριο καθώς $h \to 0$ (αν υπάρχει).

Εκφράζει την οριακή κλίση όταν το $a+h$ πλησιάσει στο a εκφράζει την κλίση της εφαπτόμενης της γρ. παρ. της f στο σημείο $(a, f(a))$

Η παράγωγος ως ρυθμός μεταβολής

Έστω ότι ένα σώμα κινείται κατά μήκος μιας ευθείας ώστε το $S(t)$ να εκφράζει τη θέση του τη χρονική στιγμή t

Σταθεροποιούμε t_0

Η μέση ταχύτητα το χρονικό διάστημα $[t_0, t]$ είναι

$$\frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0} \quad \text{για } t > t_0$$

~~Για $t \neq t_0$~~

Η στιγμιαία ταχύτητα τη χρονική στιγμή t_0 είναι

$$\lim_{t \to t_0} \frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0} \quad \text{δηλ.} = S'(t_0)$$

Ομοίως αν $a(t_0)$ την επιτάχυνση τη χρονική στιγμή t_0

$$a(t_0) = u'(t_0) = S''(t_0)$$

Αν $u(t)$ η ταχύτητα τη χρονική στιγμή t

$$u(t) = S'(t)$$

Αν από μια διατομή ενός καλωδίου σε χρόνο t περνά φορτίο $Q(t)$

Η παράγωγος $Q'(t)$ είναι ο ρυθμός μεταβολής του φορτίου (που έχει περάσει από τη διατομή) δηλ. η ένταση του ηλ. ρεύματος

$I(t) = Q'(t)$

1) $f(x) = c \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{c-c}{h} = 0$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} (\quad) = 0$$

2) $f(x) = x$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)-x}{h} = 1$$

$\Rightarrow \dots \Rightarrow f'(x) = 1.$

3) $f(x) = x^2$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = 2x + h.$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} (\quad) = 2x$$

4) $f(x) = x^n \quad n \geq 3 \quad a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + \dots + b^{n-1})$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{((x+h)-x)((x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2} \cdot x + \dots + x^{n-1})}{h}$$

$$= (x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2} x + \dots + x^{n-1} \xrightarrow{h \to 0} n \cdot x^{n-1}.$$

5) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = e^x$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \frac{e^x \cdot e^h - e^x}{h} = e^x \frac{(e^h - 1)}{h} \to 1$$

$$\xrightarrow{h \to 0} e^x \cdot 1 = e^x$$

$f'(x) = e^x$

6) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = a^x$ $a > 0$ $a \neq 1$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \underset{\text{σταθ.}}{\underline{a^x}} \, \frac{a^h - 1}{h}$$

$$\frac{a^h - 1}{h} \xrightarrow{h \to 0} \log a$$

$f'(x) = a^x \log a.$

7) $f(0, +\infty) \to \mathbb{R}$ $f(x) = \log x$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \frac{\log\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} = \frac{\log\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h} =$$

$$= \frac{\log\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} \cdot \frac{1}{x}$$

Εφόσον $\lim_{h \to 0} \frac{h}{x} = 0$

και $\lim_{t \to 0} \frac{\log(1+t)}{t} = 1$ (όπως είχαμε δει στα προηγ.)

συνεπώς $f'(x) = \frac{1}{x}$

8) Αν $a > 0$ $a \neq 1$

$f(0, +\infty) \to \mathbb{R}$ $f(x) = \log_a x = \frac{\log x}{\log a}$

$f'(x) = \dots = \frac{1}{x \cdot \log a}$

9) $f[0, +\infty)$ $f(x) = \sqrt{x}$

$h \neq 0$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x+h}}$$

Για $x \neq 0$ $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x+h}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

10) $f(x) = \sqrt[n]{x}$ $\quad n \geq 3$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\sqrt[n]{x+h} - \sqrt[n]{x}}{h} = \frac{(x+h) - x}{h\left((\sqrt[n]{x+h})^{n-1} + (\sqrt[n]{x+h})^{n-2} \cdot \sqrt[n]{x} + \cdots + (\sqrt[n]{x})^{n-1}\right)}$$

$$\xrightarrow{h \to 0} \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n} - 1}.$$

11) $f\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \sin x$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x}{h} =$$

$$= \sin\left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) + \frac{\sin h}{h} \cos x \xrightarrow{h \to 0} \sin x \cdot 0 + 1 \cdot \cos x =$$

$= \cos x$.

12) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \cos x$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$$

$$= \frac{\cos x \cdot \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} =$$

$$= \cos x \frac{\cos h - 1}{h} - \frac{\sin h}{h} \sin x \xrightarrow{h \to 0} \cos x \cdot 0 - 1 \sin x = -\sin x.$$

$f'(x) = -\sin x$.

__Πρόταση__ Αν $f: I \to \mathbb{R}$, x_0 εσ. σημείο του I.
Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε είναι συνεχής στο x_0

__Αποδ.__

Για $x \neq x_0$ $\quad f(x) - f(x_0) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)$

Εφόσον $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$

και $\lim\limits_{x \to x_0} (x - x_0) = 0$

προκύπτει ότι $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = 0$

δηλ. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ Άρα η f είναι συνεχής στο x_0

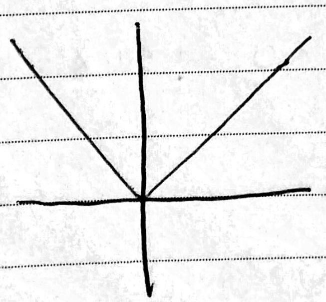
__Παρατήρηση__ Το αντίστροφο της παραπάνω πρότασης δεν ισχύει π.χ. $f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

είναι συνεχής στο 0

Για $h \neq 0$

$\dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \dfrac{|h| - |0|}{h} = \dfrac{|h|}{h} = \begin{cases} 1, & h > 0 \\ -1 & h < 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(h) - f(0)}{h - 0} = 1$, $\lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(h) - f(0)}{h - 0} = -1$



Άρα δεν υπάρχει το όριο της $\dfrac{f(h) - f(0)}{h - 0}$ δηλ. η f δεν είναι παραγ. στο 0.

__Πλευρικές Παράγωγοι__

__Ορισμός__ Έστω $f: I \to \mathbb{R}$, I διάστημα x_0 εσωτερικό σημείο του I ώστε f συνεχής στο x_0

α) Αν υπάρχει το όριο $\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

$\left(\text{ή ισοδύναμα } \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \right)$

Θα ονομάζεται παράγωγος της f από τα δεξιά στο x_0
και συμβολίζεται $f'_+(x_0)$ $[f'(\cancel{x_0^+})]$

β) Αν υπάρχει το όριο $\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ $\left(= \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right)$

Θα λέγεται παράγωγος της f στο x_0 από τα αριστερά
συμβολισμός $f'_-(x_0)$ $[f'(\cancel{x_0^-})]$

Αν το x_0 εσ. σημείο του I

Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 $\Longleftrightarrow$
υπάρχουν οι δύο πλευρικές παράγωγοι της f
στο x_0 και είναι πραγματικοί αριθμοί ίσοι μεταξύ
τους

Αν $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο
α από τα δεξιά αλλά δεν έχει νόημα να
μιλήσουμε για παράγωγο από τα αριστερά
ορίζουμε $f'(\alpha) = f'_+(\alpha)$
Ομοίως $f'(\beta) = f'_-(\beta)$.
(αν υπάρχουν)

<u>Παραδείγματα</u>

1) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\geq 0 \\ x^3 & x<0 \end{cases}$

Να εξεταστεί ως προς την παραγωγισιμότητα

Απος.

Για $x>0$ $f'(x)=2x$

f συνεχής στο 0.

Για $x<0$ $f'(x)=3x^2$

Για $h\neq 0$

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\begin{cases}\frac{h^2-0}{h} & h>0\\ \frac{h^3-0}{h} & h<0\end{cases}=\begin{cases}h & h>0\\ h^2 & h<0\end{cases}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=0$$ άρα $f'(0)=0$

2) $$f(x)=\begin{cases}x^3 & x\geq 1\\ 3x & x<1.\end{cases}$$

Η f δεν είναι συνεχής στο σημείο 1

(αφού $\lim_{x\to 1^+}f(x)=1$, $\lim_{x\to 1^-}f(x)=3$

άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1.

3) $$f(x)=\begin{cases}x^4 & , x\geq 1\\ x & x<1\end{cases}$$

Η f είναι συνεχής στο 1.

$$f'_+(1)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{(1+h)^4-1}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{1+4h+6h^2+4h^3+h^4-1}{h}=4$$

$$f'_-(1)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{1+h-\cancel{1}}{h}=1.$$

4) $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R}-\mathbb{Q} \end{cases}$ Να εξεταστεί η παραγωγισιμότητα της f στο 0

$$\frac{f(0+h) + f(0)}{h} = \begin{cases} \frac{h^2-0}{h}, & h \in \mathbb{Q} \\ \frac{0-0}{h}, & h \in \mathbb{R}-\mathbb{Q} \end{cases} = \begin{cases} h, & h \in \mathbb{Q} \\ 0, & h \in \mathbb{R}-\mathbb{Q} \end{cases}$$

Εύκολα (με χρήση του ορισμού) βλέπουμε $\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = 0$ δηλ. $f'(0)=0$.

$f(x) = \sqrt{x} \quad x \in [0, +\infty)$

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{\sqrt{h}-\sqrt{0}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}} \xrightarrow{h \to 0^+} +\infty$$

$f'_+(0) = +\infty$

$g(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & x < 0 \end{cases}$ $g'_+(0) = +\infty$ όπως πριν

$$g'_-(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{g(0+h)-g(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-\sqrt{-h}-0}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-\sqrt{-h}}{-(\sqrt{-h}\cdot\sqrt{-h})}$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{1}{\sqrt{-h}} = +\infty$$

$g'(0) = +\infty$

<u>Πρόταση</u> Έστω f,g $I \to \mathbb{R}$ x_0 εσ. σημείο του I ώστε f,g παραγ. στο x_0

(i) Η $f+g$ είναι παραγ. στο x_0 με $(f+g)'(x_0) = f'(x_0)+g'(x_0)$.
(ii) Αν $a \in \mathbb{R}$ $(a \cdot f)'(x_0) = a \cdot f'(x_0)$

(iii) Η $f\cdot g$ είναι παραγ. στο x_0 με $(f\cdot g)'(x_0) = f'(x_0)\cdot g(x_0) + f(x_0)\cdot g'(x_0)$.

Αν $g(x) \neq 0$

(iv) Η $\frac{1}{g}$ είναι παραγ. στο x_0 με $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{-g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$.

(v) Η $\frac{f}{g}$ είναι παραγ. με $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$.

Απόδειξη

(i), (ii) Εύκολα.

(iii) $\frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h}$

$= \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0+h) + f(x_0)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h}$

$= \underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{\downarrow\, f'(x_0)} \cdot \underbrace{g(x_0+h)}_{\downarrow\, g(x_0)} + \underbrace{f(x_0)}_{\downarrow\, f(x_0)} \underbrace{\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}}_{\downarrow\, g'(x_0)}$

διότι g συνεχής

$= f'(x_0)\cdot g(x_0) + f(x_0)\cdot g'(x_0)$.

(iv) $\frac{\frac{1}{g}(x_0+h) - \frac{1}{g}(x_0)}{h} = \frac{\frac{1}{g(x_0+h)} - \frac{1}{g(x_0)}}{h} =$

$= \frac{g(x_0) - g(x_0+h)}{g(x_0+h)\cdot g(x_0)\cdot h} = \frac{1}{g(x_0+h)\cdot g(x_0)} \cdot \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} =$

$\xrightarrow{h\to 0} \frac{-g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$

(v) Η $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$ είναι παραγ. με

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0) \cdot \frac{1}{g(x_0)} + f(x_0)\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0)$$

$$= \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} + f(x_0) \frac{-g'(x_0)}{(g(x_0))^2} = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

<u>Εφαρμογές</u>

(i) Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση είναι παραγ.

$$p(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

$$p'(x) = n a_n \cdot x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + 2a_2 x + a_1$$

(ii) Κάθε ρητή συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη

(iii) Η $\tan(x)$ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του π.ο.

$$(\tan)'(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \begin{cases} = \dfrac{1}{\cos^2 x} \\ = 1 + \tan^2 x. \end{cases}$$

(iv) $$(x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{-(x^n)'}{(x^n)^2} = \frac{-n x^{n-1}}{x^{2n}} = -n\, x^{-(n+1)} =$$

$$= (-n)\, x^{(-n)-1}$$

__Πρόταση__ (Παρατήρηση Καραθεοδωρή)

Έστω $f: I \to \mathbb{R}$ x_0 εσ. σημείο του I
Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 $\Leftrightarrow$
υπάρχει φ $I \to \mathbb{R}$ συνεχής με $\varphi(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
για κάθε $x \neq x_0$

Σε αυτή τη περίπτωση $\varphi(x_0) = f'(x_0)$

$\Rightarrow$ Ορίζουμε $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} & x \neq x_0 \\ f'(x_0) & x = x_0 \end{cases}$

Η φ είναι συνεχής στο x_0

$\Leftarrow$) Εφόσον η φ είναι συνεχής στο x_0
$\varphi(x_0) = \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με $f'(x_0) = \varphi(x_0)$

__Πρόταση__ Έστω $f: J \to \mathbb{R}$ g $I \to \mathbb{R}$.
x_0 εσ. σημείο του I $g(I) \subseteq J$
$g(x_0)$ εσ σημείο του J (για να μιλήσουμε για παραγ.)

Αν η g είναι παραγωγίσιμ. στο x_0 και η f είναι παραγωγίσιμή στο $g(x_0)$ Τότε η $f \circ g$ $I \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο x

$(f \circ g)'(x) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$

__Απόδειξη__
Αφού η g είναι παραγ. στο x_0 από παρατ. Καραθ.
$\exists$ $\varphi_g : I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο x_0 με

$\varphi_g(x) = \dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$ για $x \neq x_0$ και $\varphi_g(x_0) = g'(x_0)$

-> Αφού η f είναι παραγ. στο $g(x_0)$ απο Παρατ. Καραθ.
$\exists\ \varphi_f : J \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $g(x_0)$
με $\varphi_f(y) = \dfrac{f(y) - f(g(x_0))}{y-g(x_0)}$ για $y \neq g(x_0)$

και $\varphi_f(g(x_0)) = f'(g(x_0))$

Ορίζουμε $\varphi : I \to \mathbb{R}$ με $\varphi(x) = \varphi_f(g(x)) \cdot \varphi_g(x)$

Αρκει να δείξουμε οτι
α) φ συνεχής στο x_0
β) $\varphi(x) = \dfrac{f\circ g(x) - f\circ g(x_0)}{x-x_0}$ για $x \neq x_0$

γ) $\varphi(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g(x_0)$

<u>Απόδειξη</u> (οχι)
α) φ_g συν. στο x_0
g παραγ. στο x_0 => συν στο x_0
φ_f παρ. στο $g(x_0)$ } => $\varphi_f \circ g$ συν. στο x_0 =>

φ συνεχής στο x_0

β) Εστω $x \neq x_0$
(i) $g(x) \neq g(x_0)$ $\dfrac{f\circ g(x) - f\circ g(x_0)}{x-x_0} = \dfrac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x)-g(x_0)} \cdot$

$\cdot \dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = \varphi_f(g(x)) \cdot \varphi_g(x_0) = \varphi(x)$

(ii) Αν $g(x) = g(x_0)$ διοτι $\varphi_g(x)=0$
τότε $\dfrac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x-x_0} = 0 = \varphi(x)$

γ) $\varphi(x_0) = \varphi_f(g(x_0)) \cdot \varphi_g(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$